

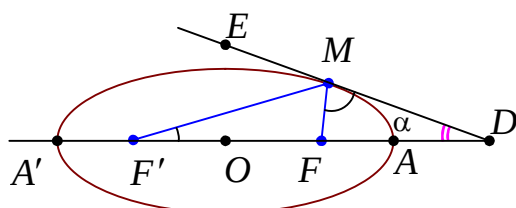
باسمه تعالی

نمونه سؤال پیرامون بیضی

درس هندسه ۳ پایه ی ۱۲ ریاضی فیزیک

تهیه کننده : گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

۱: در شکل مقابل نقطه ی D روی امتداد قطر بزرگ



بیضی بوده و DE در نقطه ی M بر بیضی مماس شده است. اگر اندازه ی زاویه های FMD و $FF'M$ به ترتیب برابر ۶۰ و ۲۰ درجه باشند. اندازه ی زاویه ی α را بیابید.

حل :

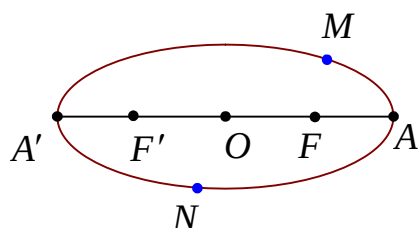
$$\angle FMD = \angle F'ME = ۶۰^\circ$$

$$\rightarrow \angle F'ME + \angle F'MF + \angle FMD = ۱۸۰ \rightarrow \angle F'MF = ۶۰^\circ$$

$$\Delta(MFD) : \angle DFM = ۸۰^\circ$$

$$\rightarrow \alpha = ۱۸۰ - (۶۰ + ۸۰) = ۱۸۰ - ۱۴۰ = ۴۰^\circ$$

۲: در شکل مقابل دو نقطه ی M و N روی بیضی قرار دارند.



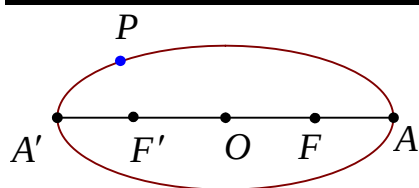
اگر $MF + MF' = ۱۰$ و $NF = ۳$ واحد طول باشد.

مقدار NF' را بیابید.

حل :

$$MF + MF' = NF + NF' \rightarrow ۱۰ = ۳ + NF' \rightarrow NF' = ۷$$

نمونه سوال هندسه ۳ - - - - - درس بیضی

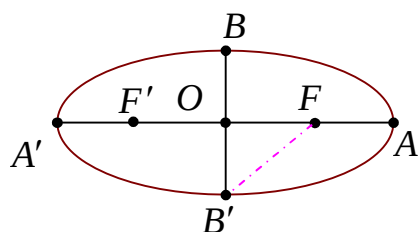


۳: در شکل مقابل نقطه‌ی P روی بیضی قرار دارد. اگر $OA = ۸$

و $PF' = ۴$ سانتی متر باشند. طول PF را تعیین کنید.

حل:

$$a = OA = ۸ \text{ و } PF + PF' = ۲a \xrightarrow{PF' = ۴} PF + ۴ = ۲(۸) \rightarrow PF = ۱۲ \text{ cm}$$



۴: در شکل مقابل $B'F = ۵$ و $AF = ۱$ سانتی متر است. طول

OB و OF را تعیین کنید.

حل:

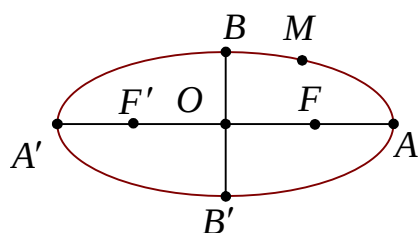
$$B'F = BF = ۵ \text{ و } BF + BF' = ۲a \rightarrow ۲BF = ۲a \rightarrow BF = a \rightarrow a = ۵$$

$$OF + AF = OA = a \rightarrow c + ۱ = ۵ \rightarrow c = ۴$$

$$OF = c = ۴$$

$$OB = b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{۲۵ - ۱۶} = \sqrt{۹} = ۳$$

۵: در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی قرار دارد. اگر $OB = ۲\sqrt{۱۰}$ و $FA = ۴$ واحد طول باشند.



الف: حاصل $MF + MF'$ را بیابید.

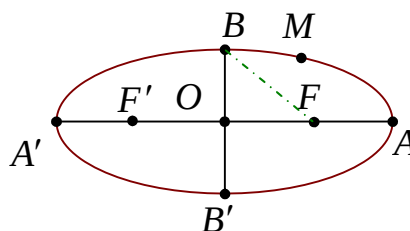
ب: مقدار $\frac{OF}{OA}$ را بدست آورید.

حل:

$$b = OB = ۲\sqrt{۱۰}$$

$$a = OA = OF + FA = c + ۴$$

$$BF = BF' = a \rightarrow BF = c + ۴$$



نمونه سوال هندسه ۳ - - - - - درس بیضی

در مثلث قائم الزاویه OBF رابطه‌ی فیثاغورس را می نویسیم.

$$(c + 4)^2 = c^2 + (2\sqrt{10})^2 \rightarrow c^2 + 8c + 16 = c^2 + 40$$

$$\rightarrow 8c = 40 - 16 \rightarrow 8c = 24 \rightarrow c = 3 \xrightarrow{a=c+4} a = 7$$

$$\frac{OF}{OA} = \frac{c}{a} = \frac{3}{7}$$

۶: در شکل مقابل، طول قطر بزرگ بیضی ۱۲ سانتی متر

است. ابتدا از کانون F خطی عمود کرده تا بیضی را در

نقطه‌ی M قطع کند و سپس از نقطه‌ی M خط d را

مماس بر بیضی رسم کرده باشیم. اگر اندازه‌ی زاویه-

ی EMF' برابر 60° درجه باشد. طول قطر کوچک بیضی را بیابید.

حل:

$$AA' = 2a = 12 \rightarrow a = 6$$

$$\angle M_1 = 60^\circ \xrightarrow{\angle M_1 + \angle M_2 + 60^\circ = 180^\circ} \angle M_2 = 60^\circ \rightarrow \angle MF'F = 30^\circ$$

و چون در هر مثلث قائم الزاویه، ضلع روبرو به زاویه‌ی 30° درجه نصف وتر است، پس:

$$MF = \frac{1}{2}MF' \xrightarrow{MF + MF' = 2a = 12} \frac{1}{2}MF' + MF' = 12 \rightarrow \frac{3}{2}MF' = 12 \rightarrow MF' = 8$$

$$\rightarrow MF = 4$$

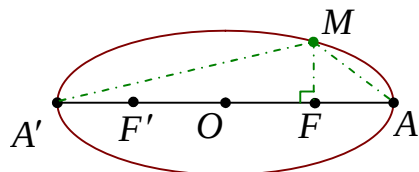
$$\Delta(MFF'): FF'^2 + MF^2 = MF'^2 \rightarrow FF'^2 + 16 = 64 \rightarrow FF'^2 = 64 - 16 = 48$$

$$\rightarrow FF' = \sqrt{48} \rightarrow FF' = 4\sqrt{3} \xrightarrow{FF' = 2c} 2c = 4\sqrt{3} \rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 36 = b^2 + 12 \rightarrow b^2 = 24 \rightarrow b = \sqrt{24} \rightarrow b = 2\sqrt{6}$$

نمونه سوال هندسه ۳ - - - - - درس بیضی

۷: در شکل مقابل از کانون F خط MF عمود بر AA' رسم



شده است. اگر $\frac{AF}{OF} = \frac{1}{2}$ و $MA = \sqrt{5}$ و $MA' = \sqrt{29}$

باشد. طول پاره خط MF' را بیابید.

حل:

$$OF = OF' = c \text{ و } \frac{AF}{OF} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow AF = A'F' = \frac{c}{2} \rightarrow A'F = A'F' + FF' = \frac{c}{2} + 2c = \frac{5}{2}c$$

حال با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث های قائم الزاویه $MA'F$ و MAF داریم:

$$\left. \begin{aligned} MF^2 &= MA'^2 - A'F^2 = 29 - \frac{25}{4}c^2 \\ MF^2 &= MA^2 - AF^2 = 5 - \frac{1}{4}c^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 29 - \frac{25}{4}c^2 = 5 - \frac{1}{4}c^2 \rightarrow 24 = \frac{24}{4}c^2$$

$$\rightarrow 24 = 6c^2 \rightarrow c^2 = 4 \rightarrow c = 2$$

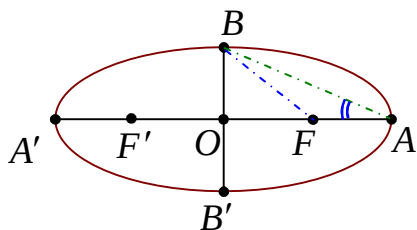
$$a = OF + AF = c + \frac{1}{2}c = \frac{3}{2}c \xrightarrow{c=2} a = \frac{3}{2}(2) = 3$$

$$\Delta(MAF): MA^2 = MF^2 + AF^2 \rightarrow (\sqrt{5})^2 = MF^2 + (1)^2 \rightarrow MF^2 = 4 \rightarrow MF = 2$$

از طرفی چون نقطه M روی بیضی قرار دارد. پس:

$$MF + MF' = 2a \rightarrow 2 + MF' = 6 \rightarrow MF' = 4$$

۸: در شکل مقابل $OB = 3$ و اندازه ی زاویه ی OAB برابر 30°



درجه است. طول پاره خط های OF و BF را بیابید.

نمونه سوال هندسه ۳ - - - - - درس بیضی

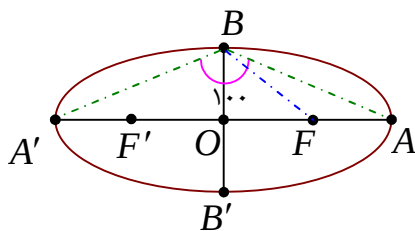
حل:

$$OA = a \text{ و } OB = b$$

$$\Delta(OBA) : \tan 30^\circ = \frac{OB}{OA} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{OA} \rightarrow OA = \frac{9}{3}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \rightarrow a = 3\sqrt{3}$$

$$BF + BF' = 2a \xrightarrow{BF=BF'} \rightarrow BF = a \rightarrow BF = 3\sqrt{3}$$

$$OF = c \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} c = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (3)^2} = \sqrt{27 - 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$



۹: در بیضی شکل مقابل، کانون F وسط پاره خط OA است.

اگر اندازه‌ی زاویه‌ی ABA' برابر 100° درجه باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی BFA را به دست آورید.

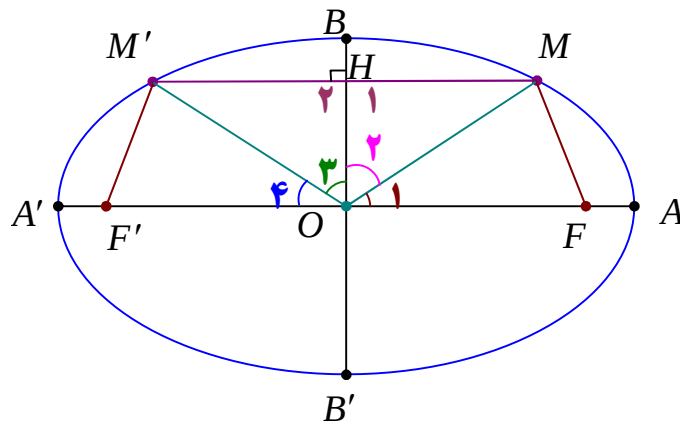
حل: در مثلث قائم الزاویه‌ی OBF داریم: $OF = \frac{1}{2}a$ و $BF = a$ ، پس OF برابر نصف وتر است. لذا

اندازه‌ی زاویه‌ی OBF برابر 30° درجه است. همچنین اندازه‌ی زاویه‌ی OFB برابر 60° درجه می باشد. در نهایت

$$\angle BFA = 120^\circ \text{ می شود که}$$

۱۰: در شکل مقابل نقاط M و M' روی بیضی چنان قرار دارند که $MH = M'H$ و MM' بر BB' عمود

است. ثابت کنید دوزنقه‌ی $MM'FF'$ متساوی الساقین است.



نمونه سوال هندسه ۳ - - - - - درس بیضی

حل: ابتدا پاره خط های OM و OM' را رسم می کنیم و نشان می دهیم که مثلث های OHM

و OHM' همنهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} OH = OH \\ \angle H_1 = \angle H_2 = 90^\circ \\ MH = MH' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(OH) \cong \Delta(OH')$$

$$\rightarrow OM = OM', \angle O_1 = \angle O_2$$

در نتیجه خواهیم داشت $\angle O_1 = \angle O_2$ و لذا مثلث های OMF و $OM'F'$ طبق (ض ز ض) همنهشت

خواهند شد. پس: $MF = M'F'$

طراحی سؤالات: دکتر افسانه نژاد زاده

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

بهمن ۱۳۹۷